Suites de nombres



Premières notions des suites de nombres

Premières notions

1-Qu'est-ce qu'une suite de nombres ?

Une suite numérique est une liste infinie de nombres. De manière plus précise

Définition 1 Une **suite numérique** est une fonction de $\mathbb{N}$ dans l'ensemble des nombres réels (ou complexes), définie sur une partie infinie de $\mathbb{N}$. Si $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ est une suite, on notera u_n le n-ième élément de la liste, c'est-à-dire le nombre $u(n)$ image de n par u. On notera aussi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou même simplement (u_n), la suite u.

Attention aux notations : u_n est un *nombre*, le terme général de la *suite* (u_n). Il ne faut pas non plus confondre la donnée de la suite (u_n) (la liste infinie...) et l'image dans $\mathbb{R}$ de l'application u, c'est à dire l'ensemble $\{u(n), n \in \mathbb{N}\}$ (les nombres réels qui figurent dans la liste). Par exemple, pour $u_n = (-1)^n$, cette image est le sous-ensemble $\{-1, 1\}$ de $\mathbb{R}$: il y a beaucoup de suites distinctes ayant cet ensemble comme image.

On peut aussi penser à des suites (u_n) de nombres complexes... Mais leur étude peut se ramener à celle de deux suites réelles $(\mathrm{Re}\, u_n)$ et $(\mathrm{Im}\, u_n)$, même s'il peut être commode de travailler directement avec la forme complexe. Nous n'en parlerons pas plus.

2- Sens de variation

On dit qu'une suite numérique **réelle** (u_n) est **croissante** ou **décroissante** lorsque la fonction u l'est, c'est à dire

$$n \geq m \Rightarrow u_n \geq u_m.$$

Il est très simple (par récurrence - voir un peu plus loin : c'est un excellent **Exercice**) d'obtenir le critère suivant, que l'on prendra comme définition :

Définition 2 Une suite numérique (u_n) est croissante si et seulement si pour tout n, $u_n \leq u_{n+1}$. Elle est décroissante si et seulement si $u_n \geq u_{n+1}$ pour tout n.

Exemple *La suite (u_n) de terme général $u_n = n^2$ est croissante, alors que la suite (v_n) de terme général $v_n = 1/n$ est décroissante.*

Il existe bien sûr des suites qui ne sont ni croissantes ni décroissantes : c'est le cas par exemple de $w : n \mapsto (-1)^n$.

3- Suites majorées, minorées ou bornées

Définition On dit qu'une suite (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M supérieur à tous les termes de la suite :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n \leq M.$$

La suite (u_n) est dite **minorée** s'il existe un réel m inférieur à tous les termes de la suite :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n \leq m.$$

Lorsqu'une suite est majorée **et** minorée on dit qu'elle est **bornée**.

On notera qu'une suite n'est pas majorée (resp. pas minorée), lorsque, pour tout réel A donné, il existe au moins un terme de la suite plus grand (resp. plus petit) que A.

Exemple *La suite $((-1)^n)$ est bornée. La suite de terme général n^2 est minorée (par 0) mais pas majorée. Supposons en effet qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $M \geq n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a alors $M > 0$, donc $\sqrt{M}$ est bien défini, par exemple comme la borne supérieure de l'ensemble majoré $\{x \in \mathbb{R},\ x^2 \leq M\}$. Or il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0 > \sqrt{M}$. Mais alors $M < (n_0)^2$, ce qui est absurde.*

Suites définies par récurrence (suites d nombre)

1-Principe de la récurrence

Nous rencontrerons deux manières différentes de définir une suite, qu'il importe de reconnaître : la conduite de l'étude d'une suite diffère en effet sensiblement suivant que leur définition est d'un type ou de l'autre.

- Une suite peut-être définie de manière **explicite**, le terme général u_n de la suite étant donné comme une fonction de n : $u_n = f(n)$, où f est une fonction, disons de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. Par exemple $u : n \longmapsto 2n$ est la suite des nombres pairs.
- Une suite peut également être définie par une expression **récurrente**. Le terme général u_n est alors donné comme une fonction du ou de plusieurs (un nombre fixe !) des termes qui le précédent : $u_n = f(u_{n-1}, u_{n-2}, \ldots, u_n - k)$. Par exemple on peut définir la suite (v_n) des nombres impairs par récurrence : $v_n = v_{n-1} + 2$. Il est alors indispensable de fixer les **conditions initiales** : il faut préciser ici $v_0 = 1$. Si l'on avait pris $v_0 = 0$, on aurait obtenu la suite des nombres pairs.

Est-ce que l'on définit bien ainsi une suite de nombres, c'est à dire une liste infinie ?... Pour répondre à cette question, il faut en général utiliser une propriété essentielle de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels :

> **Proposition** *Soit A une partie non-vide de $\mathbb{N}$, et n_0 un élément de A. Si $n+1$ appartient à A dès que n appartient à A, alors A contient $\{n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\}$.*

On peut retenir cet énoncé en le traduisant en langage plus imagé : si n_0 appartient à A, et si la propriété d'appartenir à A est héréditaire ($n+1$ est le successeur de n), alors A contient tous les entiers supérieurs ou égaux à n_0 : vous avez reconnu le principe de la démonstration par récurrence.

Cette propriété est un des axiomes admis par les mathématiciens à propos de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels. Voici par exemple une définition de $\mathbb{N}$ proposée par le mathématicien italien G. Peano (18[illegible]-1932) - et adoptée implicitement par tous :

Axiomes de Peano : Il existe un triplet $\{\mathbb{N}, 0, S\}$ constitué d'un ensemble $\mathbb{N}$, d'un élément [illegible] cet ensemble noté 0 et d'une application S de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, vérifiant :

A1 S est injective : $S(x) = S(y) \Rightarrow x = y$.

A2 L'image de $\mathbb{N}$ par S est $\mathbb{N}\backslash\{0\}$

A3 Pour toute partie A de $\mathbb{N}$ contenant 0, si $n \in A \Rightarrow S(n) \in A$, alors $A = \mathbb{N}$

L'élément $S(n)$ est appelé successeur de n. Des deux premiers axiomes découle le caractère bijectif de l'application $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\backslash\{0\}$. L'application réciproque est appelée application prédecesseur et notée : $P : \mathbb{N}\backslash\{0\} \to \mathbb{N}$. On note d'habitude 1 le successeur de 0, 2 le successeur de 1...

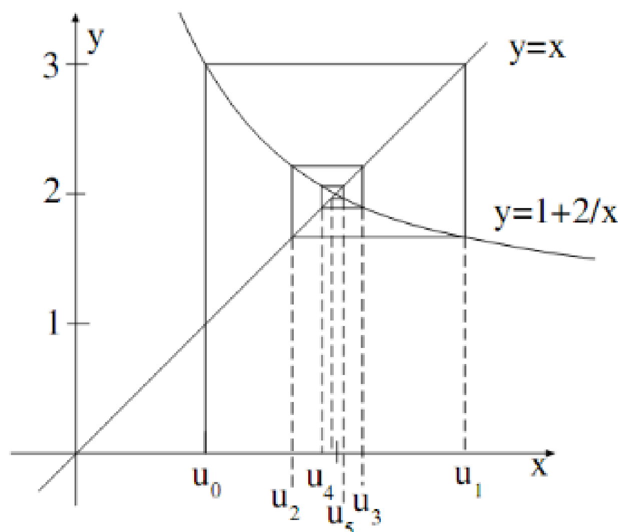
On peut montrer si un autre triplet $\{\mathcal{N}, e, \Sigma\}$ vérifie les axiomes de Peano, il existe une bijection θ de $\mathbb{N}$ sur $\mathcal{N}$ telle que : $\theta(0) = e$ et $\theta \circ S = \Sigma \circ \theta$. Autrement dit le triplet ci-dessus est "unique à une bijection près", et l'ensemble $\mathbb{N}$ qui figure ci-dessus est ce que l'on appelle *ensemble des entiers naturels*. Tous les théorèmes concernant les nombres entiers sont des conséquences de ces seuls trois axiomes.

On peut parfois trouver une expression explicite pour une suite définie par récurrence. Ce peut même être très simple, mais une démonstration par récurrence est toujours nécessaire.

La représentation graphique d'une suite réelle définie explicitement $u_n = f(n)$ est très simple : il suffit de tracer la courbe représentative de la fonction f, et d'indiquer l'image des entiers. Par contre celle d'une suite définie par récurrence est un peu plus délicate. On a tracé ci-dessous la représentation graphique de la suite (u_n) donnée par :

$$u_0 = 1, u_n = 1 + \frac{2}{u_{n-1}}, \quad n \geq 1.$$

Pour ce faire, on utilise de manière essentielle le fait que dans un repère orthonormé, la symétrie orthogonale par rapport à la première bissectrice (la droite d'équation $y = x$) transforme le point $M(a, b)$ en le point $N(b, a)$.



Un exemple de suite récurrente

L'étude du sens de variation d'une suite est très différente suivant son mode de définition :

- Pour une suite définie explicitement, du type $u_n = f(n)$ où f est une fonction [illegible] le sens de variation s'obtient facilement à partir du sens de variation de la fonction f. [illegible]n général, f est définie sur un ensemble plus grand que $\mathbb{N}$ (typiquement $\mathbb{R}^+$), et on [illegible] propriété plus forte de monotonie sur cet ensemble. Par exemple, si on sait de plus que f est dérivable, on peut regarder le signe de f'.
- Dans le cas des suites récurrentes, on revient en général à la définition, et on s'intéresse au signe de la différence $u_{n+1} - u_n$. Pour une suite dont les termes sont tous strictement positifs, on peut aussi comparer à 1 le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. L'exemple de la suite (u_n) représenté dans la Figure 1 montre que le sens de variation d'une suite définie par une relation récurrente du type $u_n = f(u_{n-1})$ n'a qu'un rapport lointain avec le sens de variation de la fonction f.

Convergence (suites de nombres)

1- Limite d'une suite

On dit qu'une suite (u_n) converge vers un réel ℓ lorsque, en dehors de n'importe quel intervalle centré en ℓ, disons de taille $\varepsilon > 0$, il n'y a pas plus d'un nombre fini, disons N_ε, de termes de la suite.

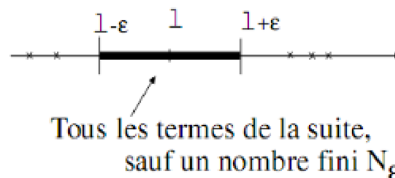


FIGURE Limite d'une suite

Voilà une autre manière de dire la même chose, qui est plus facile à utiliser en général.

Définition On dit qu'une suite (u_n) de nombres réels a pour limite un réel ℓ donné, ou **tend vers** ℓ, ou encore **converge vers** ℓ lorsque

$$\text{pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe } N_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tel que } \quad n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

On note alors :

$$\lim(u_n) = \ell \quad \text{ou encore} \quad \lim_{n \to \infty} u_n = \ell$$

Proposition *Une suite ne peut avoir deux limites distinctes.*

Preuve: Supposons qu'une suite (u_n) admette deux limites distinctes l et l'. On peut choisir un $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que les intervalles $I = [l - \varepsilon, l + \varepsilon]$ et $I' = [l' - \varepsilon, l' + \varepsilon]$ soient disjoints ($\epsilon = |l - l'|/3$ convient). Or d'après la définition de la limite il n'y a qu'un nombre fini de termes de la suite en dehors de I, donc à fortiori qu'un nombre fini de termes de la suite dans I', ce qui est absurde. □

On notera que la modification d'un nombre **fini** de termes d'une suite ne change rien pour ce qui est de sa limite éventuelle.

Définition Lorsqu'une suite (u_n) tend vers un certain réel l, on dit que cette suite est **convergente**. Dans le cas contraire on dit qu'elle est **divergente**.

Parmi les suites divergentes, on distingue celles qui tendent vers l'infini. On dit qu'une suite (u_n) tend vers $+\infty$ lorsque, pour tout A donné, il n'y a qu'un nombre fini (N_A disons) de termes de la suite qui sont inférieurs à A. On retiendra la

Définition On dit que la suite (u_n) tend vers $+\infty$ lorsque

$$\text{pour tout } A \in \mathbb{R}, \text{ il existe } N_A \in \mathbb{N} \text{ tel que } \quad n \geq N_A \Rightarrow u_n \geq A$$

On note alors :

$$\lim(u_n) = +\infty \quad \text{ou encore} \quad \lim_{n \to \infty} u_n = +\infty$$



2- Limite et relation d'ordre

On peut passer à la limite dans les inégalités larges :

Proposition *Soit (u_n) et (v_n) deux suites numériques, l et l' deux nombres réels. Supposons que (u_n) tend vers l et que (v_n) tend vers l'. S'il existe n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on a $u_n \leq v_n$, alors $l \leq l'$.*

Preuve: Supposons que $l > l'$, et posons $\epsilon = \frac{l-l'}{3}$. Puisque (u_n) tend vers l, il existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_\epsilon$, on ait $|u_n - l| \leq \epsilon$. En particulier $u_n \geq l - \epsilon$ pour tout $n \geq N_\epsilon$. De la même manière, il existe N'_ϵ tel que, pour tout $n \geq N'_\epsilon$, $v_n \leq l' + \epsilon$. Posant $n_1 = \max\{n_0, N_\epsilon, N'_\epsilon\}$, on a donc

$$u_{n_1} \geq l - \epsilon > l' + \epsilon \geq v_{n_1},$$

ce qui est absurde.

Attention ! Les inégalités *strictes* ne sont pas conservées par passage à la limite : on a par exemple $1/n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, mais la suite $(1/n)$ tend vers 0.

Proposition *Toute suite convergente est bornée.*

Preuve: Soit (u_n) une suite convergente, et $\ell \in \mathbb{R}$ sa limite. Pour $\epsilon = 1$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \ell| \leq 1$ pour tout $n \geq N_1$, ou encore $\ell - 1 \leq u_n \leq \ell + 1$ pour tout $n \geq N_1$. Posant $M = \max\{u_0, u_1, \ldots, u_{N_1}, \ell + 1\}$ et $m = \min\{u_0, u_1, \ldots, u_{N_1}, \ell - 1\}$, on a bien $m \leq u_n \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

Attention ! La réciproque est fausse : la suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ est bornée mais pas convergente.

Calcul de limite (suite de nombre)



1- Le théorème des gendarmes

> **Proposition** *Soit (u_n) une suite numérique. S'il existe une suite (v_n) qu[illegible] 0 et telle que, pour tout n (où même à partir d'un certain rang) :*
>
> $$|u_n - l| \leq v_n$$
>
> *alors (u_n) tend vers l.*

Preuve: Soit ε un réel positif. Il existe un entier N_ε tel que, pour tout $n \geq N_\varepsilon$, $|v_n| \leq \varepsilon$. Donc pour tout $n \geq N_\varepsilon$, $|u_n - l| \leq \varepsilon$. □

Autrement dit pour montrer qu'une suite converge vers $l \in \mathbb{R}$ il suffit de majorer **sa distance à** l par une suite positive dont on sait qu'elle tend vers 0. Pour pouvoir utiliser ce résultat, il est

nécessaire de disposer de **suites de références**. Le lecteur courageux utilisera les définitions pour montrer la

> **Proposition** *Soit k et a deux réels.*
>
> 1. *La suite $(n^k)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers zéro si $k < 0$ et vers $+\infty$ si $k > 0$.*
> 2. *La suite (a^n) tend vers zéro si $|a| < 1$, et vers $+\infty$ si $a > 1$.*
> 3. *La suite $(n^k a^n)$ tend vers zéro si $|a| < 1$ pour n'importe quel k.*

Voici un critère du même genre pour montrer qu'une suite tend vers $+\infty$:

> **Proposition** *Soit (u_n) une suite réelle. S'il existe une suite (v_n) qui tend vers $+\infty$ et telle que pour tout n (où même tout n assez grand) :*
>
> $$v_n \leq u_n$$
>
> *alors la suite (u_n) tend vers $+\infty$.*

2- Limites et opérations

Nous résumons dans le tableau qui suit les principaux résultats concernant la limite de la somme, du produit et du quotient de deux suites. Ils permettent de déterminer assez facilement la limite éventuelle de certaines suites. On se contente de donner la preuve du résultat concernant la limite d'une somme : le lecteur pourra s'en inspirer pour démontrer les autres.

> **Proposition** *Soit (a_n) et (b_n) deux suites numériques, (c_n) la somme de (a_n) et (b_n), c'est-à dire la suite de terme général $c_n = a_n + b_n$. Si (a_n) tend vers le réel l et (b_n) tend vers le réel l', alors (c_n) tend vers $l + l'$.*

Preuve: Soit ε un réel positif. Il existe un entier $M_{\varepsilon/2}$ tel que, pour tout $n \geq M_{\varepsilon/2}$, on a $|a_n - l| \leq \varepsilon/2$. De même, il existe un entier $M'_{\varepsilon/2}$ tel que, pour tout $n \geq M'_{\varepsilon/2}$, on a $|b_n - l'| \leq \varepsilon/2$. Soit alors $N_\varepsilon = \max\{M_{\varepsilon/2}, M'_{\varepsilon/2}\}$. Pour tout $n \geq N_\varepsilon$ on a :

$$|c_n - (l + l')| \leq |a_n - l| + |b_n - l'| < \varepsilon.$$

Résumons : pour tout $\epsilon > 0$, on a trouvé un entier N_ϵ tel que $|c_n - (\ell + \ell')| \leq \epsilon$ pour tout $n \geq N_\epsilon$: la suite (c_n) converge vers $\ell + \ell'$.

Soit donc (u_n) et (v_n) deux suites numériques.

si		alors	
$\lim(u_n)$	$\lim(v_n)$	$\lim(u_n + v_n)$	$\lim(u_n v_n)$
$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$\ell + \ell'$	$\ell\ell'$
$+\infty$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$\begin{cases} +\infty & \text{si } \ell' > 0 \\ -\infty & \text{si } \ell' < 0 \\ ? & \text{si } \ell' = 0 \end{cases}$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$
$-\infty$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$\begin{cases} -\infty & \text{si } \ell' > 0 \\ +\infty & \text{si } \ell' < 0 \\ ? & \text{si } \ell' = 0 \end{cases}$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$

si	alors
$\lim(u_n)$	$\lim(\frac{1}{u_n})$
$\ell \in \mathbb{R}, \ell \neq 0$	$1/\ell$
0	?
0, avec $u_n > 0$ pour tout n	$+\infty$
0, avec $u_n < 0$ pour tout n	$-\infty$
$+\infty$	0
$-\infty$	0

TABLE – Limite d'une somme, d'un produit et d'un quotient



Attention ! dans ces tableaux, la présence d'un **?** signale qu'il n'y a pas de résultat général possible, et qu'il faut étudier chacune de ces **formes indéterminées** en utilisant d'autres méthodes. Par exemple si $u : n \mapsto -n^2$ et $v : n \mapsto n^3$, on voit que : $\lim(u_n) = -\infty$, et $\lim(v_n) = +\infty$. Le tableau précédent ne permet donc pas directement de connaître la limite éventuelle de la suite (w_n) donnée par $w_n = u_n + v_n$. Pourtant il suffit de remarquer que $w_n = n^2(n-1)$ et de conclure grâce à la huitième ligne. (On dit que l'on a **levé l'indetermination**, sport que vous avez sûrement déjà pratiquée.)

3- Cas des suites définies par récurrence

> **Proposition** *Soit (u_n) une suite numérique qui converge vers un réel ℓ. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue au point ℓ, alors la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(\ell)$.*

De manière un peu rapide, on écrit souvent cette proposition sous la forme

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\lim_{n\to+\infty} u_n).$$

Preuve: Soit $\epsilon > 0$. Puisque f est continue en ℓ, il existe $\alpha(\epsilon) > 0$ tel que

$$|x - \ell| \leq \alpha(\epsilon) \Longrightarrow |f(x) - f(\ell)| \leq \epsilon.$$

Puisque (u_n) converge vers ℓ, il existe un entier $N_{\alpha(\epsilon)}$ tel que

$$n \geq N_{\alpha(\epsilon)} \Longrightarrow |u_n - \ell| \leq \alpha.$$

Donc, notant $N_\epsilon = N_{\alpha(\epsilon)}$, pour tout $n \geq N_\epsilon$ on a $|f(u_n) - f(\ell)| \leq \epsilon$.

Cette proposition est souvent utilisée pour trouver les valeurs possibles de la limite d'une suite définie par récurrence. Supposons en effet que (u_n) est une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Si (u_n) converge, sa limite ℓ doit vérifier

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\lim_{n\to+\infty} u_n) = f(\ell).$$

Autrement dit, le réel ℓ doit être un **point fixe** pour f, c'est-à-dire une solution de l'équation $f(\ell) = \ell$.

Critères de convergence (suites de nombres)



On donne maintenant des résultats plus difficiles, qui permettent de déterminer si une suite converge sans avoir d'idée à priori sur sa limite. Ces énoncés peuvent tous être vus comme des conséquences de l'axiome de la borne supérieure. En particulier ces énoncés ne sont pas valables si l'on travaille dans $\mathbb{Q}$ (i.e. avec des suites de nombres rationnels, dont les limites éventuelles sont dans $\mathbb{Q}$).

1- Suites monotones

> **Proposition** *Si (u_n) est une suite croissante et majorée alors elle converge, et sa limite est la borne supérieure de l'ensemble $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. Si (u_n) est une suite décroissante et minorée alors elle converge, et sa limite est la borne inférieure de l'ensemble $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.*

Preuve: L'ensemble $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas vide, et il est majoré par hypothèse : il admet donc une borne supérieure b. Soit $\epsilon > 0$. Puisque b est la borne supérieure de la suite (u_n), il existe au moins un terme de la suite dans l'intervalle $[b-\epsilon, b]$ (sinon b ne serait pas le plus petit majorant). Notons n_0 le rang de ce terme. Puisque la suite est croissante, on a $b - \epsilon \leq u_{n_0} \leq u_n$ pour tout $n \geq n_0$. On a bien sûr aussi $u_n \leq b$ pour tout n, donc finalement

$$n \geq n_0 \Longrightarrow |u_n - b| \leq \epsilon.$$

Ce raisonnement étant valable pour tout $\epsilon > 0$, on a bien montré que $\lim(u_n) = b$.

Exemple *Soit : $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}$. On montre par récurrence que $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ et on en déduit que la suite (u_n) est majorée par 3. Cette suite est croissante, et on conclut donc qu'elle est convergente.* ***Attention !*** *rien ne dit que sa limite est 3 : on sait seulement (voir la Proposition 2.3.6) qu'elle est inférieure à 3.*

Exemple 2 *Soit pour $n \geq 1$, $u_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2}$. La suite (u_n) est croissante, puisque $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$. Elle est aussi majorée puisque, pour $p \geq 2$, $\frac{1}{p^2} \leq \frac{1}{p(p-1)} \leq \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}$ et donc*

$$u_n \leq 1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n} \leq 2.$$

Cette suite est donc convergente. **Attention !** *là encore, la suite est majorée par 2, donc sa limite est inférieure à 2, mais on ne peut certainement pas en déduire que la suite tend vers 2 : elle tend vers...* $\frac{\pi^2}{6}$.

Exemple 3 *Considérons la suite* (u_n) *de rationnels, où* u_n *est le plus grand nombre décimal avec* n *chiffres après la virgule dont le carré est inférieur à 2 :* $u_0 = 1$, $u_1 = 1,4$, $u_2 = 1,41$, *etc... On peut voir que* (u_n) *est une suite croissante majorée qui converge vers* $\sqrt{2}$.

2- Suites adjacentes

Définition On dit que deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes lorsque

1. (u_n) est croissante,
2. (v_n) est décroissante,
3. $\lim(u_n - v_n) = 0$.

Vous avez déjà rencontré des suites adjacentes : la méthode de la dichotomie, utilisée par exemple pour démontrer le Théorème des Valeurs Intermédiaires consiste a construire deux suites (a_n) et (b_n), avec (a_n) croissante, (b_n) décroissante et $b_n - a_n \to 0$ puisque $b_n - a_n \leq \frac{b-a}{2^n}$ (on coupe l'intervalle en 2 à chaque étape).

Attention ! La troisième propriété ne suffit pas en général à assurer la convergence des suites (u_n) et (v_n) : prendre par exemple $u_n = v_n = n\ldots$

Proposition *Si* (u_n) *et* (v_n) *sont deux suites adjacentes, elles convergent et ont même limite.*

Preuve: On montre d'abord que (u_n) est majorée par v_0. Sinon il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u_p > v_0$. Si $d = (v_p - v_0)/2$, on a encore $u_p > v_0 + d$. Puisque (u_n) est croissante, on a donc, pour tout $n \geq p$, $u_n \geq u_p > v_0 + d$. Ensuite, puisque (v_n) est décroissante, on a, pour tout $n \geq p$, $u_n > v_0 + d \geq v_n + d$. Mais alors pour tout $n \geq p$ on a $u_n - v_n > d$, et $\lim(u_n - v_n) \geq d$, ce qui est absurde.
Maintenant (u_n) est une suite croissante et majorée, donc elle converge vers un réel ℓ. Or $v_n = u_n - (u_n - v_n)$, donc en utilisant le résultat sur la limite d'une somme, on voit que (v_n) tend aussi vers ℓ.

Exemple *Soient (u_n) et (v_n) les suites définies par* $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n+1)$ *et* $v_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)$. *On a* $v_n - u_n = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln(1 + \frac{1}{n})$, *donc* $\lim(v_n -$ …
De plus, pout tout $n \geq 1$, on a

$$
\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+2) + \ln(n+1) = \frac{1}{n+1} - \ln(1 + \frac{1}{n+1}) \\
&= \frac{1}{n+1} - (\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2}\epsilon(\frac{1}{n})),
\end{aligned}
$$

où ϵ est une fonction de limite nulle en 0. Du coup

$$
u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2(n+1)^2}(1 + \epsilon(\frac{1}{n})),
$$

ce qui montre qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout $n \geq N$: la suite (u_n) est croissante à partir du rang N. On montre de la même manière que (v_n) est décroissante à partir d'un certain rang (c'est un peu plus difficile), et donc que (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite. Cette limite, qu'on note en général γ, porte le nom de constante d'Euler.

On peut aussi énoncer cette proposition en termes d'intervalles fermés emboités : si $I_n = [u_n, v_n]$ avec (u_n) croissante, (v_n) décroissante et si la longueur de I_n tend vers 0, alors il existe un et un seul réel ℓ appartenant à l'intersection de tous les intervalles I_n.

3- Critère de Cauchy pour les suites.

Ce dernier critère est très important : il constitue lui aussi une propriété fondamentale de l'ensemble des nombres réels.

Définition On dit qu'une suite (u_n) vérifie le **critère de Cauchy** ou que (u_n) est une **suite de Cauchy** lorsque

pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, $\quad n > N_\varepsilon, m > N_\varepsilon \Rightarrow |u_n - u_m| < \varepsilon$

Autrement dit (u_n) est une suite de Cauchy lorsque la distance entre deux termes quelconques est aussi petite que l'on veut, quite à ne considérer que les termes de rang suffisamment grand. Voici d'un coup un grand nombre d'exemples de suites de Cauchy !

Proposition *Toute suite convergente est une suite de Cauchy.*



Preuve: Soit ℓ la limite de la suite (u_n), et $\epsilon > 0$. Il existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N_\epsilon$, alors $|u_n - \ell| \leq \epsilon/2$. Du coup si $n, m \geq N_\epsilon$, on a

$$|u_n - u_m| \leq |u_n - \ell| + |u_m - \ell| \leq \epsilon.$$

Proposition *Toute suite de Cauchy est bornée.*

Preuve: Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que si $n, m \geq N_1$, alors $|u_n - u_m| \leq 1$. En particulier pour tout $n \geq N_1$, on a $u_{N_1} - 1 \leq u_n \leq u_{N_1} + 1$. La suite (u_n) est bornée à partir du rang N_1, donc elle est bornée.

Voici encore une propriété fondamentale de $\mathbb{R}$, qui n'a pas d'équivalent dans $\mathbb{Q}$.

Proposition *Toute suite de Cauchy est convergente dans $\mathbb{R}$.*

Preuve: Pour tout n, l'ensemble $\{u_m,\ m \geq n\}$ est inclus dans $\{u_m,\ m \geq 0\}$, donc est minoré. Puisqu'il n'est pas vide, il admet une borne inférieure qu'on note $a_n = \inf\{u_m,\ m \geq n\}$.
La suite (a_n) est croissante, majorée puisque la suite (u_n) l'est, et l'on note s sa borne supérieure ; on va montrer que (u_n) converge vers s. Soit donc $\epsilon > 0$.

- Par définition de la borne supérieure, il existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que $|a_n - s| \leq \epsilon/3$ pour tout $n \geq N_\epsilon$.
- Puisque (u_n) est une suite de Cauchy, il existe $M_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que si $n, m \geq M_\epsilon$, alors $|u_n - u_m| \leq \epsilon/3$.

Soit donc $n \geq \max\{N_\epsilon, M_\epsilon\}$. Par définition de la borne inférieure, il existe $m_0 \geq n$ tel que $a_n \leq u_{m_0} \leq a_n + \epsilon/3$. Or

$$|u_n - s| \leq |u_n - u_{m_0}| + |u_{m_0} - a_n| + |a_n - s|,$$

donc pour $n \geq \max\{N_\epsilon, M_\epsilon\}$, on a bien $|u_n - s| \leq \epsilon$. □

On donne maintenant un exemple de suite de nombres rationnels vérifiant le critère de Cauchy, mais dont la limite (qui existe dans $\mathbb{R}$ d'après la proposition précédente !) n'est pas un nombre rationnel. Autrement dit, dans $\mathbb{Q}$, il y a des suites de nombres rationnels qui vérifient le critère de Cauchy mais qui ne sont pas convergentes.

Exemple 1 *Soit* (u_n) *la suite donnée par* $u_0 = 1$ *et* $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{2}{u_n})$.

1. On vérifie (par récurrence) que tous les termes de cette suite sont rationnels. Ensuite, en étudiant les variations de la fonction $]0, +\infty[\ni x \mapsto \frac{1}{2}(x + \frac{1}{x})$ *sur* $\mathbb{R}^+$, *on vérifie que* $u_n \geq \sqrt{2}$ *pour* $n \geq 1$.

2. En remarquant que

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2 - u_n^2}{2u_n},$$

on démontre ensuite que cette suite est décroissante, et, par conséquent, converge (dans $\mathbb{R}$ *!). Elle vérifie donc le critère de Cauchy.*

3. On montre ensuite que sa limite est $\sqrt{2}$. *On sait déjà que cette limite existe et qu'elle est supérieure ou égale à* $\sqrt{2}$. *Mieux : on obtient par passage à la limite :*

$$\ell = \frac{1}{2}(\ell + \frac{2}{\ell}),$$

et donc $\ell = \sqrt{2}$ *: la limite de la suite* (u_n) *n'est pas un rationnel.*

Exemple 2 *Soit* (u_n) *la suite donnée par*

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

On vérifie que, pour tout $n \geq 1$, $u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$. *Cette inégalité montre que l'on n'a pas la propriété de Cauchy, et que, par conséquent, cette suite est divergente.*

4 - Le lemme de Cesaro

On termine ce chapitre par un résultat qui s'avère très utile, mais que nous n'utiliserons pas (ou peu !) dans ce cours. Le lecteur pourra considérer qu'il figure là à titre culturel.

> **Proposition** *Soit* (u_n) *une suite de réels, et* (v_n) *la suite définie par*
>
> $$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}.$$
>
> *Si* (u_n) *converge vers un réel* ℓ, *alors* (v_n) *converge aussi vers* ℓ.

Le lecteur notera que v_n est la moyenne des termes de la suite (u_n) de rang inférieur à n. On admet cette proposition, pour ce concentrer sur l'exercice suivant, qui est une application typique du Lemme de Cesaro.

Exemple *Soit (w_n) a suite définie par $w_0 = 1/2$ et $w_{n+1} = w_n(1 - w_n)$ pour tout $n \geq 0$. On démontre par récurrence que $0 < w_n < 1$ pour tout n, puis que la suite (w_n) décroissante. Elle converge donc, et sa limite ne peut être que $\ell = 0$.*

On veut être plus précis, et savoir à quelle vitesse la suite (w_n) tend vers 0. Pour cela on introduit la suite (u_n) définie par

$$u_n = \frac{1}{w_{n+1}} - \frac{1}{w_n} = \frac{1}{1 - u_n}.$$

Il est clair que (u_n) tend vers 1. La suite (v_n) de ses moyennes tend donc aussi vers 1, ce qui donne

$$v_n = \frac{1}{n}(u_1 + \cdots + u_n) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{w_{n+1}} - \frac{1}{w_1}\right) \to 1$$

On en déduit que $nw_n \to 1$ ou encore

$$w_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\epsilon\left(\frac{1}{n}\right),$$

pour une fonction ϵ de limite nulle en 0.